

TEMAT 1: ZMIENNE LOSOWE SKOKOWE – FUNKCJA ROZKŁADU PRAWDOPODOBIEŃSTWA, DYSTRYBUANTA, PRAWDOPODOBIEŃSTWO

Zadanie 1-1

Wyznaczyć za pomocą dystrybuanty następujące prawdopodobieństwa:

$$P(X \leq b), P(X \geq b), P(X > b), P(a < X \leq b), P(a \leq X \leq b), P(a < X < b).$$

Zadanie 1-2

W dziesięcioosobowej grupie studenckiej przeprowadzono sprawdzian.

Niech X będzie zmienną losową przyporządkowującą poszczególnym studentom ocenę (przy czterostopniowej skali ocen). Mamy więc zbiór studentów $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{10}\}$ i zbiór ocen $\{2, 3, 4, 5\}$. Niech zmienna losowa X będzie określona następująco:

$$X(\omega_7) = 5, \quad X(\omega_2) = X(\omega_6) = X(\omega_{10}) = 4, \quad X(\omega_1) = X(\omega_3) = X(\omega_5) = X(\omega_8) = 3, \quad X(\omega_4) = X(\omega_9) = 2.$$

Tak więc stosunek ocen bardzo dobrych, dobrych, dostatecznych i niedostatecznych jest odpowiednio: 1:3:4:2.

Dla określonej w powyższy sposób zmiennej losowej X wyznaczyć:

- funkcję rozkładu prawdopodobieństwa i jej wykres,
- histogram funkcji rozkładu prawdopodobieństwa,
- dystrybuantę i jej wykres,
- $P(X < 3.5)$ korzystając z:
 - funkcji rozkładu prawdopodobieństwa,
 - dystrybuanty (podać interpretację prawdopodobieństwa na wykresie dystrybuanty),
- $P(3 \leq X < 4.5)$ korzystając z:
 - funkcji rozkładu prawdopodobieństwa,
 - dystrybuanty (podać interpretację prawdopodobieństwa na wykresie dystrybuanty),
- $P(X = 3)$ (podać interpretację prawdopodobieństwa na wykresie dystrybuanty).

Zadanie 1-3

Znany jest rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X poprzez funkcję prawdopodobieństwa podaną w tabeli:

x_i	-5	-2	0	1	3	6
p_i	0.1	0.2	0.1	0.2	c	0.1

Wyznaczyć:

- stałą c oraz histogram funkcji rozkładu prawdopodobieństwa,
- dystrybuantę i jej wykres,
- $P(X < 2)$, $P(X = 3)$, $P(-2 \leq X < 1)$ korzystając z:
 - funkcji rozkładu prawdopodobieństwa,
 - dystrybuanty (podać interpretację prawdopodobieństw na wykresie dystrybuanty),
- $P(X \geq 3)$, $P(-2 \leq X \leq 3)$, $P(-5 < X \leq 1)$, $P(0 < X < 6)$.

Zadanie 1-4

Znany jest rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X poprzez dystrybuantę daną wzorem:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq -5 \\ 0.2 & \text{dla } -5 < x \leq -1 \\ 0.5 & \text{dla } -1 < x \leq 3 \\ 0.7 & \text{dla } 3 < x \leq 6 \\ 1 & \text{dla } x > 6 \end{cases}.$$

Wyznaczyć:

- wykres dystrybuanty,
- funkcję rozkładu prawdopodobieństwa (w postaci tabeli) oraz histogram funkcji rozkładu prawdopodobieństwa,
- $P(X < -1)$, $P(X = 6)$, $P(-5 \leq X < 3)$ korzystając z:
 - funkcji rozkładu prawdopodobieństwa,
 - dystrybuanty (podać interpretację prawdopodobieństw na wykresie dystrybuanty),
- $P(X \geq 6)$, $P(-1 \leq X \leq 6)$, $P(-1 < X \leq 6)$, $P(-1 < X < 6)$.

TEMAT 2: ZMIENNE LOSOWE TYPU CIĄGŁEGO – GĘSTOŚĆ PRAWDOPODOBIENSTWA, DYSTRYBUANTA, PRAWDOPODOBIENSTWO

Zadanie 2-1

Zmienna losowa X ma funkcję gęstości postaci:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x(2-x) & \text{dla } 0 \leq x \leq c \\ 0 & \text{dla pozost. } x \end{cases}.$$

Dla jakiej wartości c funkcja f jest gęstością prawdopodobieństwa? Znaleźć dystrybuantę wyznaczonego rozkładu. Obliczyć prawdopodobieństwa:

$$P(X < 0.5), P(X \geq 1.5), P(0.25 < X < 2)$$

oraz podać ich interpretację na wykresie gęstości i dystrybuanty. Ile jest równe prawdopodobieństwo $P(X = 0.75)$.

Zadanie 2-2

Zmienna losowa X ma funkcję gęstości postaci:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{dla } x \geq 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}.$$

Znaleźć dystrybuantę rozkładu. Obliczyć prawdopodobieństwa:

$$P(X \geq 2), P(X < 4), P(X = 3), P(2 < X < 4)$$

oraz podać ich interpretację na wykresie gęstości i dystrybuanty.

Zadanie 2-3

Wyznaczyć stałą A tak, aby funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ Ae^{-3x} & \text{dla } x > 0 \end{cases}.$$

była gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej X . Znaleźć dystrybuantę rozkładu. Obliczyć prawdopodobieństwa:

$$P(X > 1), P(0.5 < X < 2)$$

oraz podać ich interpretację na wykresie gęstości i dystrybuanty.

Zadanie 2-4

Zmienna losowa X ma funkcję gęstości postaci:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{dla } x > 3 \end{cases}.$$

Znaleźć dystrybuantę rozkładu. Obliczyć prawdopodobieństwa:

$$P(X > 2), P(0.5 < X < 1.5)$$

oraz podać ich interpretację na wykresie gęstości i dystrybuanty.

ODPOWIEDZI DO WYBRANYCH ZADAŃ

TEMAT 1: ZMIENNE LOSOWE SKOKOWE – FUNKCJA ROZKŁADU PRAWDOPODOBIENSTWA, DYSTRYBUANTA, PRAWDOPODOBIENSTWO

Zadanie 1-1

Z definicji oraz z własności dystrybuanty mamy:

$$P(X < b) = F(b), \quad P(a \leq X < b) = F(b) - F(a), \quad P(X = b) = F(b+) - F(b)$$

$$\text{gdzie } F(b+) = \lim_{x \rightarrow b+} F(x)$$

Obliczamy:

$$P(X \leq b) = F(b+), \quad P(X \geq b) = 1 - F(b), \quad P(X > b) = 1 - F(b+)$$

$$P(a < X \leq b) = F(b+) - F(a+), \quad P(a \leq X \leq b) = F(b+) - F(a), \quad P(a < X < b) = F(b) - F(a+)$$

Zadanie 1-2

Wyznaczamy następujące wielkości:

a) funkcja rozkładu prawdopodobieństwa:

x_i	2	3	4	5
p_i	0.2	0.4	0.3	0.1

c) dystrybuanta:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 2 \\ 0.2 & \text{dla } 2 < x \leq 3 \\ 0.6 & \text{dla } 3 < x \leq 4 \\ 0.9 & \text{dla } 4 < x \leq 5 \\ 1 & \text{dla } x > 5 \end{cases}$$

d) $P(X < 3.5) = 0.6$, e) $P(3 \leq X < 4.5) = 0.7$, f) $P(X = 3) = 0.4$

Zadanie 1-3

Wyznaczamy następujące wielkości:

a) $c = 0.3$

b) dystrybuanta:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq -5 \\ 0.1 & \text{dla } -5 < x \leq -2 \\ 0.3 & \text{dla } -2 < x \leq 0 \\ 0.4 & \text{dla } 0 < x \leq 1 \\ 0.6 & \text{dla } 1 < x \leq 3 \\ 0.9 & \text{dla } 3 < x \leq 6 \\ 1 & \text{dla } x > 6 \end{cases}$$

c) $P(X < 2) = 0.6$, $P(X = 3) = 0.3$, $P(-2 \leq X < 1) = 0.3$

d) $P(X \geq 3) = 0.4$, $P(-2 \leq X \leq 3) = 0.8$, $P(-5 < X \leq 1) = 0.5$, $P(0 < X < 6) = 0.5$

Zadanie 1-4

Wyznaczamy następujące wielkości:

b) funkcja rozkładu prawdopodobieństwa:

x_i	-5	-1	3	6
p_i	0.2	0.3	0.2	0.3

c) $P(X < -1) = 0.2$, $P(X = 6) = 0.3$, $P(-5 \leq X < 3) = 0.5$

d) $P(X \geq 6) = 0.3$, $P(-1 \leq X \leq 6) = 0.8$, $P(-1 < X \leq 6) = 0.5$, $P(-1 < X < 6) = 0.2$